

(2) 第8学年における研究主題に基づく実践

2つの対象世界を往還しながら子供と共に歩む学びのストーリー

—未知の関数の正体を解明しながら見方・考え方を育む授業（第8学年）—



「僕にとって関数とは見方によって姿を変えるものです。 x 番目の A4 用紙の縦の長さを y cm とすると、 $y=21$ と $y=0x+21$ の 2 パターンの式で考えることができます。このように見方によって 0 次関数や 1 次関数と捉えられるのが関数です。」

8A の学びのストーリーが完結した際、天野が書いた省察の一部である。未知の関数と遭遇した子供たち。自分がもっている知識と比較し、多様な視点から未知の関数の正体を探り、関数的な見方・考え方を深めていく実践である。

1 学びの構想

(1) 図と数学の世界の往還

本校算数・数学科では、「具体と抽象を往還しながら因果関係を明らかにし、見方・考え方を広げていく」を本質的な学びとして常に意識しながら実践を行っている。子供たちは具体と抽象に代表される 2 つの対象世界を往還しながら、因果関係を明らかにしていく。特に図形は、抽象的な数学の世界を捉えやすくする 1 つのツールとして、子供たちはよく用いてきた。そこで、今回も図形から規則性を見いだすことで、2 つの伴って変わる数量に注目させ、子供たちと様々な関数を見つけしてきた。「具体と抽象を往還する」という同じ学び方をする中で、子供たちの見方・考え方がより深まると考えている。子供たちが図形から見いだす関数は、既習のものや未知のものと様々であるが、図や表、グラフ、式を行き来することで、未知の関数の正体に迫っていった。

(2) 比例という最強の武器をどう使うか!?

子供たちは、変化の様子を、表や式で表したり、グラフ上に点をうったりして表すことができる。また比例は、子供たちにとって、一番なじみ深く一番理解している関数である。そこで、関数を比例、反比例、一次関数、二次関数と別々に学ぶのではなく、比例と比較し、共通点や相違点を明ら

かにすることで、比例と同じような視点で関数を捉えさせていきたいと考えた。反比例、一次関数、二次関数の表やグラフ、式は一見すると比例と捉えることはできない。しかし、グラフをずらしたり、表の書き方を工夫したりすることで、比例の性質が見え始める。つまり、「○は□に比例する」と捉えられるようになるので「 $\text{○} = \text{比例定数} \times \text{□}$ 」という式を用いて未知の関数を式で表現することができようになる。中学校 3 年生の教科書に「 $y = ax^2$ は、 y は x の 2 乗に比例する」と表現されているが、なぜ 2 乗に比例するのかは、「○は□に比例する」という見方で関数を捉えることで理解が深まると考える。そこで、関数を別々に捉えるのではなく、比例という知識を軸に見方・考え方を育んでいきたい。

(3) 子供と共に歩む学びのストーリー

教師は、1 つの学びを通して、「どんなことを学ばせ、どんな力を身につけさせたいのか？」という、子供の姿を常に考えながら、学びのデザインを行っている。今回の取り組みでは、図 1 のような学びのデザインを設定した。しかし、実際に実践を進めていくと子供たちの学びから図 2 のように学びのストーリーは変化していた。図 2 の中には、単元を越えたものや学年を越えたもの、他教科の授業で学ぶものが含まれている。しかし、ぶ

つ切りで知識や技能を学ぶことより、子供たちが知りたいと必要性を感じたときに学ぶ方が、理解が深まったり、見方・考え方が広がったりすると考える。また教師と子供たちの間にズレが生じたことで新しい発見へとつながるきっかけとなる。

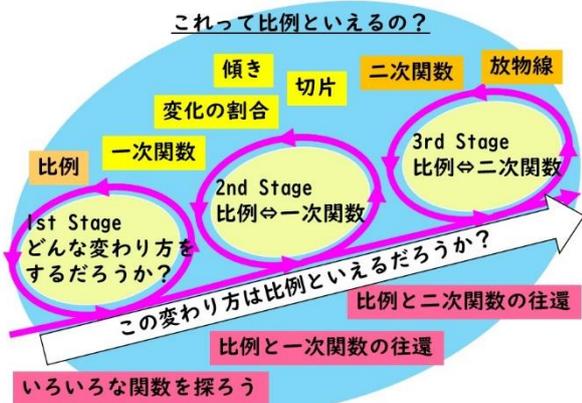


図1 教師の見通し

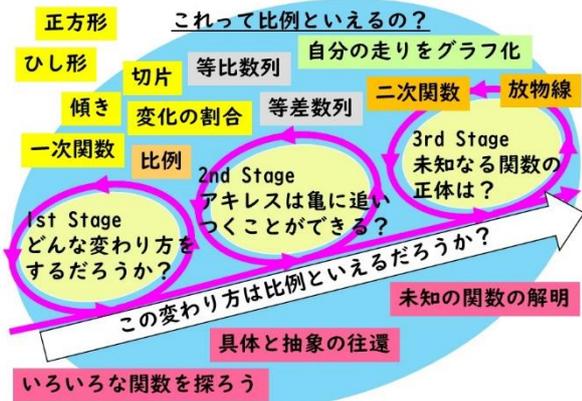


図2 共に歩んだ学びのストーリー

(4) 子供たちの学びのつづやき

子供たちの学びのストーリーは一人一人が違い、教師の引いたレール通りいかないことが多い。そこで、授業中の子供たちの発言や、ノートの一部に書かれたつづやきを学びのつづやきと呼び、毎時間共有しながら、学びを子供と共に歩んできた。子供たちの学びのつづやきから発意が生まれたり、新しい発見につながったりするなど、学びのつづやきは子供たちの見方・考え方を広げたり、深めたりしている。また子供たちだけではなく、教師の学びとなることが多々あり、現在の実践は、過去の卒業生の学びとつながっている。つまり、毎回の実践は目の前の子供たちだけではなく、過去の卒業生たちも今も共に歩んでいると考える。

2 学びのストーリー

(1) 伴って変わるものは？ (第1時)

子供たちの手もとに図3のような。黄色と赤色の正方形がかかれたノートが配布された。子供たちからは「何かが変わるかってことやね」と教師の心を見抜いた発言が聞こえてきた。

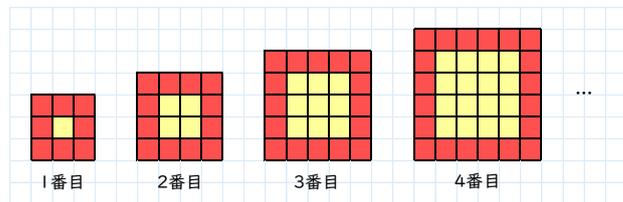


図3 子供たちに配布されたノートの一部

教師：よく課題を見抜いたね!!1番目、2番目、3番目…x番目と変えていくと〇〇〇〇も変わる。〇〇〇〇に入るものには、どんなものがあるだろうか？

教師が課題を投げかけると同時に子供たちはノートに考えを書き始めたり、近くの子と相談したりしながら、何種類も見つけていった。そこで、見つけたものを全体で共有すると写真4のように20種類以上のものが共有された。

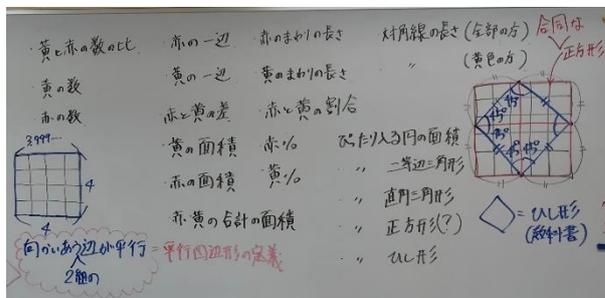


写真4 子供たちが見つけた伴って変わるもの共有している中で、吉田が「正方形にぴったり入る円の面積」と発言した。この発言を機に、ぴったり入る図形シリーズが、どんどん発表されていった。その中には、「ぴったり入る台形」というものがあった。

教師：ぴったり入る台形とは？

子供たちは、自分のノートに図形をかき、近くの子と見せ合っていた。すると野口が前に出て写真5の左側の図形をホワイトボードにかいた。クラスからは「えー!?!」という驚きの声が上がった。次に天野が写真5の右側の図をかいた。今度はク

ラスから「そうそう」と安心の声が聞こえてきた。しかし…。

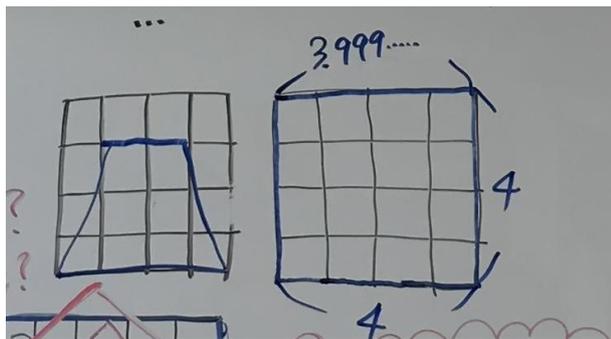


写真5 左側：野口作、右側：天野作

三谷：それならなんでもありじゃね〜!?

この発言がもとになり、「ぴったり入る台形」はホワイトボードから姿を消していった。しかし、ぴったり入る図形シリーズの話は終わらなかった。次に目を付けたのは、ひし形であった。

教師：ぴったり入るひし形とは？

子供たちは、先ほどと同じように自分のノートに図形をかき、近くの子と見せ合っていた。再び野口が前に出てきた。ホワイトボードに写真6の左側の図をかいた。「えー!？」再びクラスから驚きの声があがった。続けて天野も前に出てきて写真6の右側の図をかいた。こちら先ほどと同じように「そうそう」と安心の声が聞こえた。しかし、2人のかき方のちがいがから次第にかかされている図形がひし形なのか疑問を抱く声が聞こえ始めた。

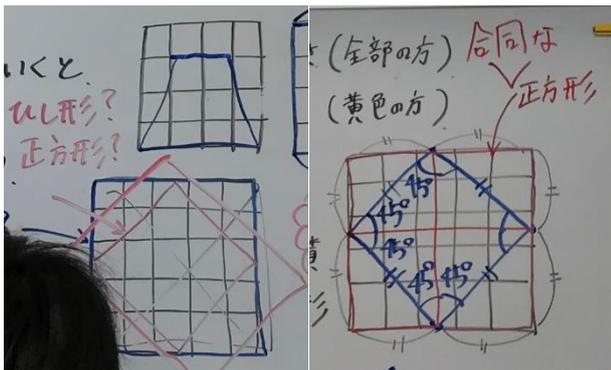


写真6 左側：野口作、右側：天野作

教師：これってひし形なの？

子供たちからは「ひし形でしょ!!」「正方形じゃない!？」という声があがってきた。藪は「向きがひし形だからひし形である」とひし形にこだわっている。そこで、全体でひし形と正方形の定義を共有したり、辺の長さが等しくなる理由を証明し

たりした。学習内容としては8年生の後半に学ぶものであるが、子供たちはこれまでの学びをもとに全体で考えていた。ひし形にこだわりをもっていった藪は、授業後のノートに写真7のようなつぶやきを残していた。子供たちの学びの中で関数的な視点だけにとどまらず、図形への学びにつながり、さらに新たな疑問をもつ子供たちの思考に今回驚かされた。

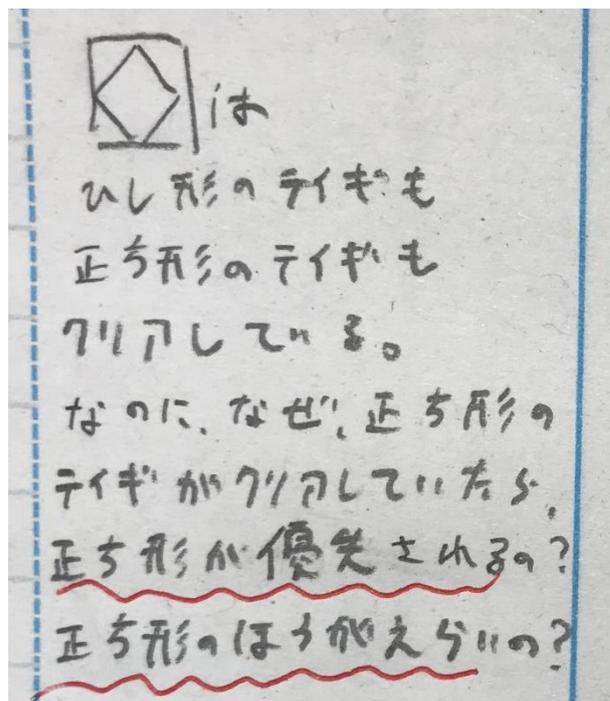


写真7 藪が抱いた新しい疑問

教師にとってぴったり入るシリーズは予想外であったが、図形の学びへとつながっていった展開は新しい発見となった。

(2) どんな変わり方をするだろうか？(第2~3時)

子供たちが見つけた関数が20種類以上あったので、役割分担をして、変わり方を調べていくことにした。子供たちと役割分担の方法を相談したところ、4人班の中で役割分担して調べていくことになった。

そして、ここから個人探究の時間が始まった。子供たちは、表、グラフ、式を使って、次々変わり方の正体を見いだしていった。子供たちの中には、グラフのかき方に迷っていたり、式にすることに苦戦していたりする子も見受けられた。しかし、自分たちで仲間を見つけて、小さなグループ

を作り、4人班とは別の集団で学び合う姿が見られた。それぞれが探究している中、私が気になっていた変わり方が1つあった。それは、「赤と黄の個数（面積）の割合」である。なぜなら2つの割合の変わり方をどうやって表現するのだろうか。私は疑問に思っていたからだ。変わるものを見つけたときも調べ方を共有したときも子供たちからは何の疑問も出てこなかった。そこで、「赤と黄の個数（面積）の割合」は、そのままの流れで調べていくことになった。「子供たちは2つ割合の変わり方をどう表現するのか…？」そう思いながら、子供たちの学びを見てみると、片岡のノートにかかれたカラフルなグラフが目にとまった。片岡のノートには黄色と赤で塗られた棒グラフ（写真8）がかかれていた。

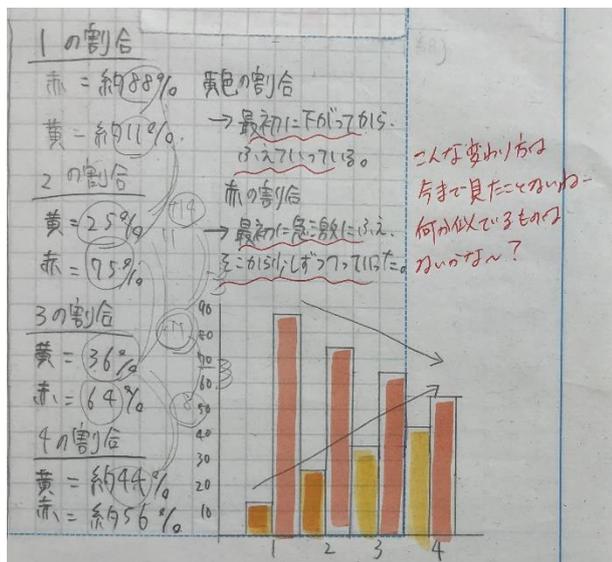


写真8 片岡がかいた割合を表すグラフ

教師：どうしてこのグラフをかいたの？

片岡：小学校のときに習って、割合をグラフにするは難しかったので、棒グラフにするのわかりやすいと思ったからです。

教師：この手があったか〜!!

片岡：でも、こんな変わり方をするグラフは初めて見ました。

割合の表現の仕方は他にもあるかもしれないし、この表現の仕方が正しいとは言い切れない。しかし、片岡のこのグラフの捉え方こそが、算数・数学を通して、子供たちに身につけさせたい力であり、学び方であると私は気づかされた。私自身、

グラフと言われると、x-y軸をかき、そこに点をうったり、直線か曲線かのどちらかの線をひいたりしたものであるという概念があった。だから、「赤と黄の個数（面積）の割合」の変わり方のグラフのかき方にずっと疑問をもっていたのだろう。しかし、子供たちの考え方は、柔軟であり、発想豊かである。自分の固定概念にとらわれることなく、子供たちと共に学び続けられる授業をつついきたいと改めて感じる時間となった。

(3) これって比例？ (第4~8時)

個人探究を終え、それぞれの変わり方が見えてきた子供たち。ここからは、グループに戻り、個人で考えた変わり方を共有し、変わり方を仲間分けしていった。すると湊が「赤の面積の式が2つあるので、どのグループに入れたらいいのか迷います」と発言した。そこで、全体で赤の面積の変わり方を共有することになった。表をかき、変わり方を共有していく。

教師：100番目はいくつ？

野口：404です。

中澤：計算早い!! どうやって計算したの？

野口：番目が1つ増えると、面積は4ずつ増える。100番目までに間が99個あるから 99×4 で最初の8を足さないといけないから +8 (写真9)。

塩野：なるほど!! 植木算みたいやね。

中澤：植木算って何？

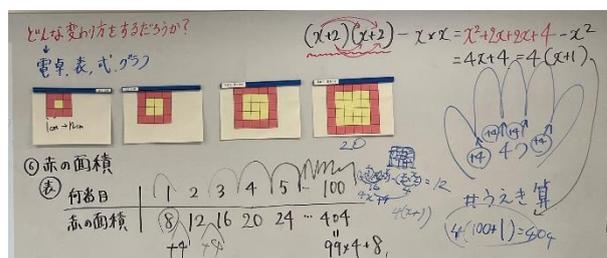


写真9 赤の面積の変わり方

このあと塩野が全体で植木算について説明し、植木算が全体で共有された。ここで植木算を使う視点はさすがである。そして、野口の考え方からできる式が $y=4(x+1)$ であることも確認できた。

教師：もう1つの求め方は？

三谷：例えば2番目だと $(2+2) \times (2+2) - (2 \times 2)$

で面積を求められます。

塩野：なるほど。全体からひくんだね。

三谷の求め方に関しては全体も納得しているようであった。そこで、三谷の考えからできる式を文字で表すと、 $(x+2) \times (x+2) - x \times x = x^2 + 2x + 2x + 4 - x^2 = 4x + 4 = 4(x+1)$ となり、野口の式と一致することから、式のたどり着く先は同じであることを共有し湊の謎は解明された。

教師：この変わり方は比例？

次の授業は、教師のこの言葉から始まった。子供たちは、自分たちの知識を手掛かりに、表、グラフ、式を使いながら考えていく。授業後の子供たちのつづやきは写真10のように様々であった。

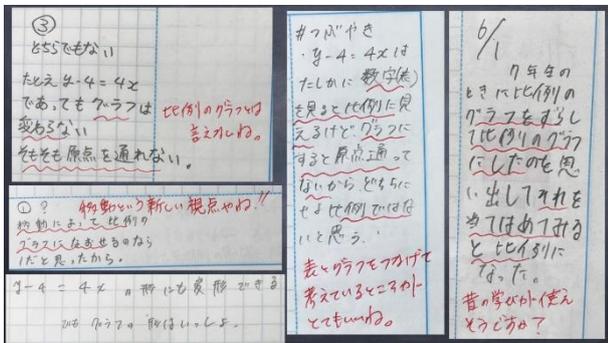


写真10 授業後の子供たちのつづやき

写真10のつづやきを共有するところから次の時間が始まった。その中に「グラフをずらす(写真10の一番右)」というつづやきがあったので、グラフをずらした塩野が発表することになった。

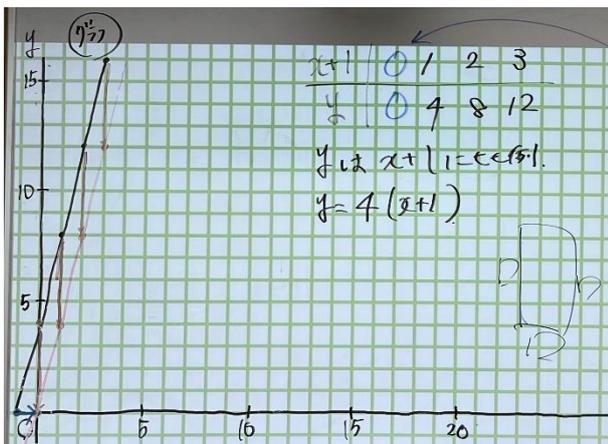


写真11 比例として捉える塩野の見方

塩野は7年生のときの学び(昨年度も同じような学びをしていたので)を生かし写真11のようにグラフを下にずらすことで、比例として捉えら

れると説明した。またグラフと表をつなげ、 y は x に比例していないが、表から $y-4$ は x に比例すると考えられると説明した。授業後、和田は今回の学びから自分の変容を捉え、次の写真12のようなつづやきを残していた。

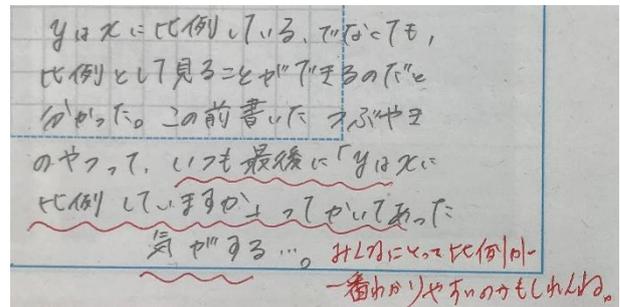
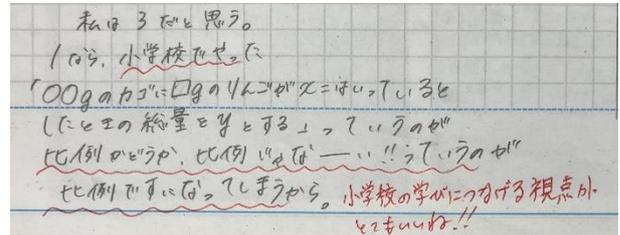


写真12 和田の比例の捉え方の変容

赤の面積の変わり方を調べ終えたので、次の時間からは黄色の変わり方を調べていくことにした。すると下の2つの疑問が出てきた。

- ①グラフは直線なのか？曲線なのか？
- ②この変わり方は比例なのか？

そこで4人班に分かれて、班ごとに①か②のどちらか課題を決めて取り組むことになった。多くの班が②の課題に取り組んでいたので、②から共有することにした。②の考え方として多かったのは、「比例ではない」であった。その理由は「 $y=x^2$ に比例定数がない」や「比例定数が一定でない」というものであった。それは子供たちの多くが、 $x^2=x \times x$ と捉え、片方の x を比例定数と考えていたからだ。しかし、野口の一言で教室雰囲気が変わり始めた。

野口：比例定数1じゃないの？だって $x^2=x \times x \times 1$ だよな？

この発言を機に「比例になる」と考えていた班が動き出した。

土田：普通にグラフをかいたら(写真13の)左側のグラフになったんですけど、 x 軸を

x^2 軸にしたら、(写真13の)右側のように原点を通る直線になったので、比例になります。

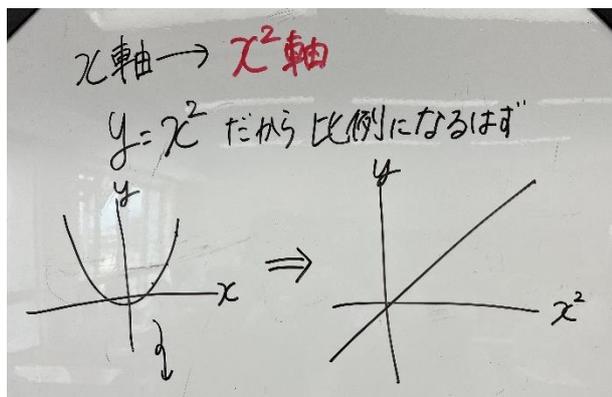


写真13 土田が考えたグラフの形

土田は7年生のときから比例として捉える視点をもっていたので、今回もさすがであった。この土田の発言をもとに、 y は x の2乗に比例すると共有し授業が終わった…と思っていたら、山本が土田のかいたグラフを写真14のようにこっそりと直していた。

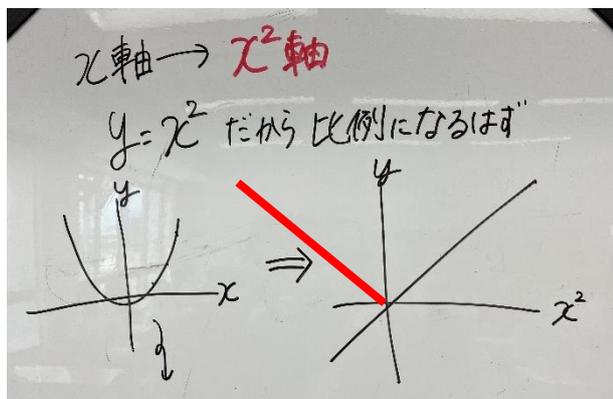


写真14 山本が直したグラフ

山本は x の値が負の数するとき、 y の値は正の数になると考え、直していたのだ!!このグラフを見た子供たちは、「にせ比例!!」や「比例もどき!!」などと表現していた。この子供らしい独特の表現の仕方がとても印象的で、改めて子供たちの捉え方の面白さに気づかされた。またグラフをこっそり直した山本は、普通の授業であまり発言をしない子であったので、こういった場面で活躍できたことは、たいへんうれしく思った。授業後のつぶやきにも「グラフの違いに気づいた山本さんはすごいと思いました」というものが見られ、個人の

活躍を認められる雰囲気がとても素敵であると感じた(もちろんこのつぶやきは次の時間に共有しました)。

「4班のやつをしりたいです」というつぶやきがあったので、4班の考え(写真15)から次の時間は始まった。

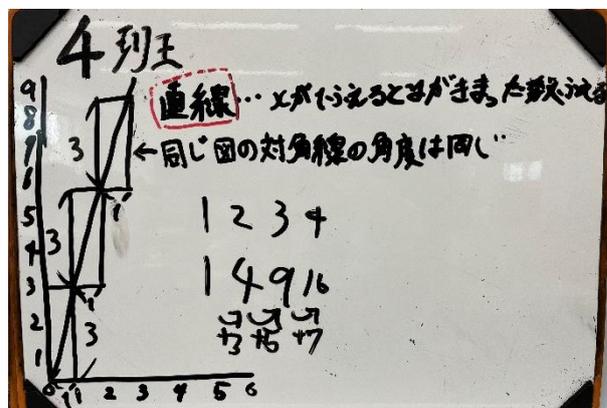


写真15 直線となるグラフの捉え方

堀：私たちの班はグラフが直線になるときを考えました。増え方が一定だと合同な長方形ができていきます。だから、対角線をひくと直線に並ぶので、増え方が一定だとグラフは直線になります。

4班の学びから変化の割合が一定であると、グラフが直線になることが共有でき、黄色の変わり方は増え方が一定ではないので、曲線であると確認することができた。またここで子供たちは、増え方に注目したので、 $y=2x^2$ や $y=x^3$ 、 $y=x^4$ などと比例定数や指数を変えていく際の式と増え方の規則性を全員で見いだしていった。この授業後、和田こんなつぶやき(写真16)を残していた。

今日は、とても学ばせてくれた感謝あり
ました。数学は、発見したり、解決したり
する時間が一番好きだと思いました。
1つのつづきやきか = こんは 国 = つづき
るは つづき と思いました。

写真16 和田のつながりを見いだしたつぶやき(4) これってアキレスの話に似てない?(第9~12時)

赤と黄色の変わり方を調べ終えたので、次に「赤と黄色の差」を調べていくことになった。それぞれ、まずは個人で調べる時間取った。しかし、野口と藪は違う話をしていた。

野口：これってアキレスの話に似てない？

藪：あの神話の話ね。

野口：アキレスって追いつけないんだよね？

藪：架空の話だから追いつけるでしょ!!

すると近くにいた子供たちもその話に巻き込まれていき、野口と藪の周りにはアキレスの話で盛り上がり始めた。

そこで、一旦、全員の活動を止めて、野口の思いを全体で話してもらった。するとクラス全体がアキレスの話題でいっぱいになり、いつの間にかクラスの課題が、「赤と黄色の差」から「アキレスは亀に追いつけるのか？」という課題に変わっていった。いたるところで「追いつく」、「追いつけない」の議論が始まった。そんな中、三谷が「グラフにすると〜」と発言したので、三谷に前で説明してもらうことになった。

三谷：横軸を時間、縦軸を距離として、グラフをかくと、このグラフ(写真17左側)になり、ここで追いつきます。

すると野口も前にやってきて説明を始めた。

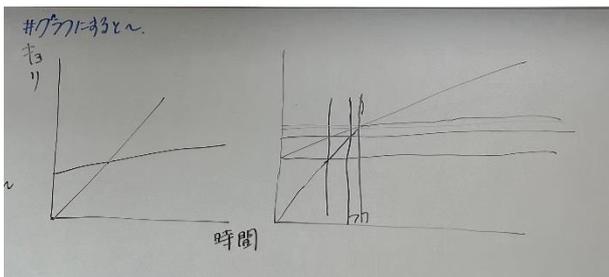


写真17 左側：三谷作、右側：野口作

野口：僕も三谷さんと同じようにグラフを考えたんですけど、アキレスが亀のところまで行くと亀は少し先に進むんですよ。これを繰り返しているの、追いつけないと思います。

全員が2人の説明を聞いていたが、この時間中に答えはでなかった。しかし、子供たち自身がグラフを用いて、具体的な場面とグラフを行き来しながら学んでいる姿は印象的であった。授業後の

つぶやきにも写真18のようなものがあつた。

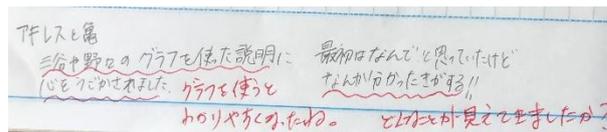


写真18 グラフのよさを実感する子供たち

前時から引き続きアキレスの課題に取り組む子供たち。「数値化する」や「現実で考える」といったつぶやきをもとに、「追いつける派」と「追いつけない派」でグループをつくり、考えることとなった。子供たちは、実際に歩いてみて考えたり、インターネットで調べて考えたりと、いろいろな方法で取り組んでいた。

次の時間は、各グループの考えを共有する時間となった。「2秒後に追い越している」という考えから多くの子供たちは追いつけると思うようになってきた。しかし、野口は納得いかない。そこで共有されたのが、和田の班の考え(写真19)であつた。

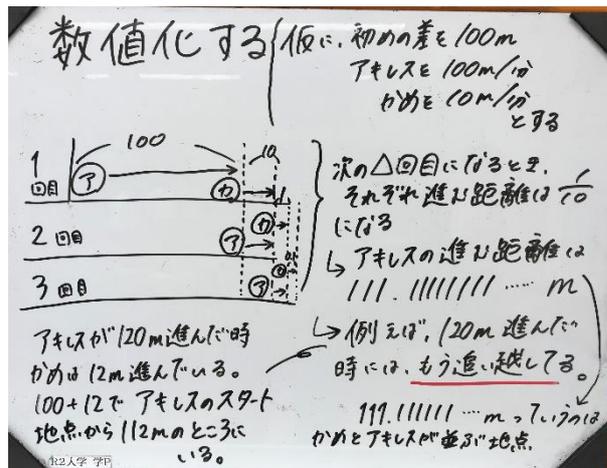


写真19 数値化して考えた和田の班

和田の班の発表からアキレスの話は追いつくまでの話で、アキレスは亀を追い越すことができるといった結論に至った。また和田の班の学びから等比数列の学びへとつながっていった。等比数列は高校で学ぶものであるが、子供たちから学んでみたいという声があつたので、少し学んでいくことにした。子供たちは等比数列の意味はすぐに理解できた。しかし、等比数列の和を求める際に手が止まった。2+4+8+16+32+...+1024の和を簡単に求める方法はないだろうか?悩む子供たち。しかし、和田の発言で現状が大きく変わった。

和田：1022+1024 をすればいいだけです。

野口：なんで1022 なん？

和田：1024 より2小さいから。

野口：なんで2小さいの？

和田：その数の前までの和を出すと、すべて2
小さいことに気づいたんです。例えば、
8までなら前の数までが2と4で和は6、
16ならその前までの和は2+4+8=14
だからです。

この瞬間クラス中から大きな拍手が沸き上
がった。「すげ〜!!」、「なんでそんなことに気づける
ん!!」クラス中が大興奮であった。和田の規則性を見
抜く視点からクラス全体の学びの深まりを感じる時
間となった。道は外れたが、アキレスの話題を出した
野口に感謝したい。授業後の和田のつぶやき(写真20)
を見ると、今回の学びの価値を見いだしているよう
であった。

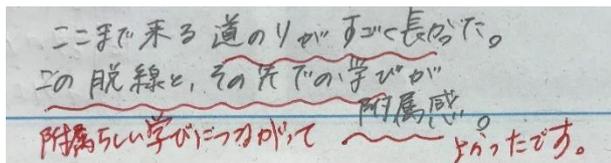


写真20 附属の学びを実感した和田のつぶやき
(5) 自分の走りをグラフ化しよう!! (第13時)

アキレスの走りの話題から子供たちも体育で
50m走の記録を取ったという話になり、自分の走
りをグラフ化することにした。子供たちは10mご
とのタイムを計っており、その記録から時間と距
離の関係を探っていき、実際に表をかいたりやグ
ラフに点をうってみたりした。その結果、20m以
降は変わり方が一定であるので、グラフは直線に
なり、10mまでは曲線になるだろうと予想し、そ
れぞれの走りをグラフ化(写真21)した。

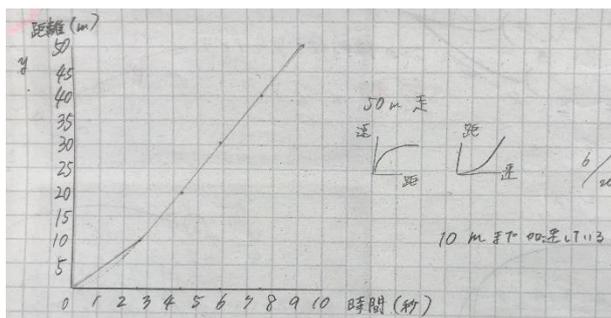


写真21 グラフ化された子供たちの走り

(6) これって比例? (第14~16時)

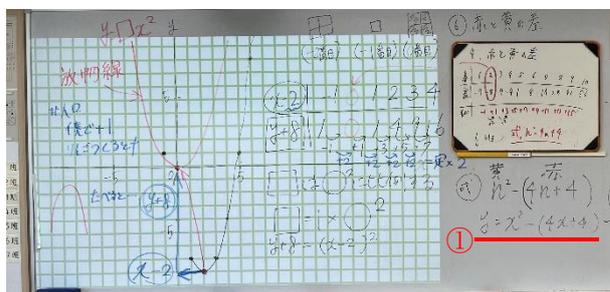
アキレスの話から「赤と黄の差」に戻ってきた
子供たち。4人グループになり、表、グラフ、式
を使って変わり方を共有していき、変わり方の正
体をつかみ始めていた。

グループで考えたことを共有していく中で、お
決まりの質問を投げてみた。

教師：これって比例？

土田：原点をすらせば…。

比例という思考が定着してきたのか、子供たち
は、グラフをずらし、表をかき変え、式をつくつ
た。(写真22)。



できあがった式を計算すると、最初に見つけた
式(写真22の下線①)と同じに形になった。授業
後のつぶやきにも写真23のようなものがあり、
遠回りでも共に歩むことができよかったと感じ
た。

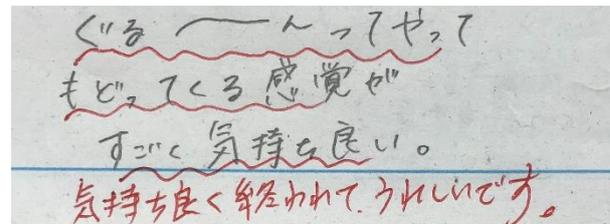


写真23 学びの広がりを感じるつぶやき

(7) 変わらない関数とは? (第17時)

教師：赤と黄色の正方形がかかれていたA4サ
イズの用紙の縦の長さは、x番目のとき、
どう変わるだろうか？

土田：変わらないですよ？

教師：これってどんな関数？表は？グラフは？
式は？もしかして比例？それとも〇〇
関数？グループで考えて、名前を付けて
みてね。

学びのストーリーの最後に、変わらない関数を
子供たちに投げてみた。子供たちはこれまでの学

びを生かしながら、関数の正体を探っていた。そこから子供たちは、自分たちなりに名前をつけながら、最後の学びのストーリーを歩んでいった。

3 省察

(1) 「遠回りしてもどる」面白さの発見

数学の授業をしているとよく「答えは何ですか?」と聞かれることがあった。数学という教科は答えが決まっていることが多く、子供たちも早く答えにたどり着きたいと感じているようだ。しかし、ここ数年は「教師は答えを教えたり、やり方を教えたりするだけでいいのだろうか?」と疑問を抱くようになった。「困難に出会った際やうまくいかなかった際、答えややり方しか知らない子供たちは、どう生きていくのだろうか?」と思うようになり、どんな子を育てていくといいのか考えるようになった。そんなときに出会った言葉が「遠回りしてもどる」であった。この言葉は、吉田がつぶやき(写真24)に書いた言葉であった。

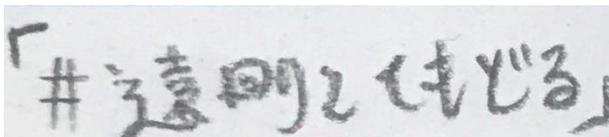


写真24 吉田のつぶやき

このつぶやきは、図25の図形の面積の求め方をいろいろ考えた際に吉田が書いたものである。この言葉を機にこのクラスでは「遠回りしている間は計算で大変だけど、それをこえてもどってきたときが、すごくうれしくて、やめられない!!」や「遠回りすればするほど達成感が大きい。最も遠回りな計算を探すのももしかしたら楽しいかもしれない」と多くの子がつぶやきに書き始めた。私は、この言葉を見て、答えまでの道のりやその道のりを見いだすことに子供たち自身が価値を感じているのではないかと思うようになった。

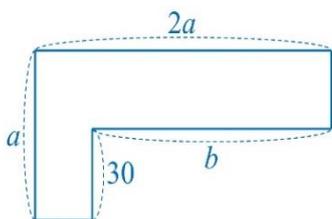


図25 今回の実践の前の単元の学び

今回の実践でも、最後省察をした際、松井が次の言葉(写真26)を残していた。

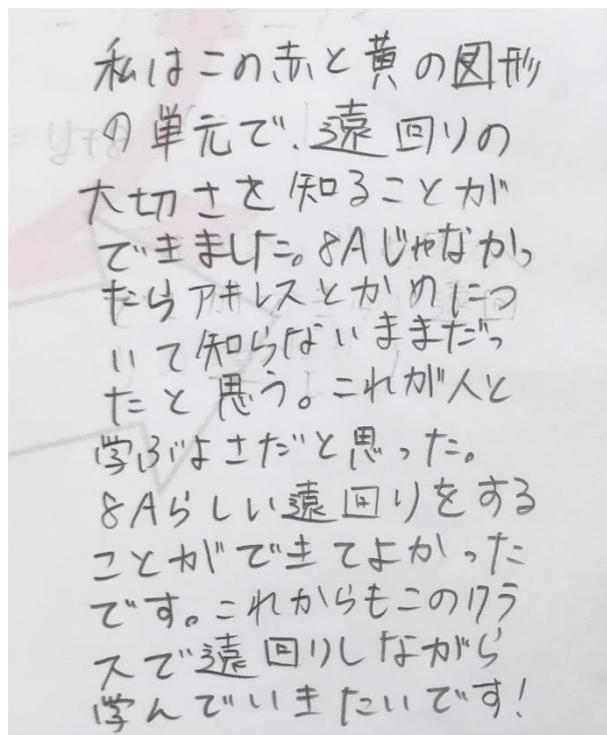


写真26 松井の省察シートの一部

今回の実践では、学びのストーリー(図1と図2より)は大きく変わったが、共に歩むことで私自身も新しい発見がいくつもあった。今後も子供たちの学びに寄り添い、共に授業を歩む教師でありたいと考える。

(2) 自然と集まる学びの場

今回の挑戦として、子供たちが自然と動き、学びを広めたり、深めたりするために、子供たちが自然と集まるような授業展開を目指していった。そのため、今回は4人班にこだわることなく、考え方が似ている者同士で班を組んだり、授業中に自由に立ち歩いて相談したりできるように心がけた。理由は、子供たち同士で学び合いことで、学びが広がったり、深まったりすると考えるからだ。今回の実践の中でもアキレスの話では、藪と野口の会話から学びが広がり、さらに同じ考えをもつ仲間が集まったことで、実験をしたり等比数列を考えたりするなど、より深い学びにつながったと感じた。しかし、グループ編成のメンバーを見ると仲いい子の集まりも見られたので課題が残る。しかし、今後も挑戦する価値がありそうだ。